ЗАДАЦИ – II НЕДЕЉА

ЗАДАЦИ СА * СУ ПОСЕБНО ВАЖНИ

1. Нека је ρ релација еквиваленције.

   а) Доказати да је A/ρ разлагање скупа A.

   б) Доказати да свако разлагање $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ скупа A индукује јединствену релацију еквиваленције ρ т.д. важи: $\mathcal{A} = A/\rho$

2. Доказати да је $\equiv (\mathrm{mod}\ p)$ рел. екв. на $\mathbb{Z}$.

   (<u>НАПОМЕНА</u>: $m \equiv n \ (\mathrm{mod}\ p) \overset{\text{деф.}}{\iff} p \mid m-n$)

   Наћи класе еквиваленције и количнички простор.

3. Нека је задата релација дељивости $\mid$ на $\mathbb{N}$.

   а) Доказати да је $\mid$ поредак на $\mathbb{N}$?

   б) Да ли је $\mid$ тотални поредак?

   в) Да ли је $\mid$ поредак на $\mathbb{Z}$?

4. Наћи све релације које су уједно и релације еквиваленције и поретка на неком скупу A.

5. Нека је $(A, \leq)$ уређен скуп и $S \subseteq A$. Доказати да је минимум скупа S јединствен уколико постоји.

6. Доказати да важи:

$$M = \max S \iff M = \sup S \wedge M \in S$$

$$m = \min S \iff m = \inf S \wedge m \in S$$

7.* Нека је $\mathcal{A}$ фамилија у $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. Доказати да је $\sup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}$ и $\inf \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}$.

8.* Доказати да је уређен скуп $(A, \leq)$ комплетан ако и само ако сваки одоздо ограничен скуп у A има инфимум.

Другим речима доказати да је:

АКСИОМА СУПРЕМУМА $\iff$ АКСИОМА ИНФИМУМА.

9. 1) $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 (S) = \Gamma_1 (\Gamma_2 (S))$ засек инверзног графика

2) $\pi_1 (\Gamma_1 \circ \Gamma_2) = \Gamma_2^{-1} (\pi_1 \Gamma_1)$

3) $\pi_2 (\Gamma_1 \circ \Gamma_2) = \Gamma_1 (\pi_2 \Gamma_2)$

4) $\Gamma (A \cap B) \subseteq \Gamma(A) \cap \Gamma(B)$ да ли важи „$=$"?

5) $\Gamma(A) = \Gamma(A \cap \pi_1(\Gamma))$

10. Нека су $\Gamma_1 \subseteq A \times B$ и $\Gamma_2 \subseteq X \times Y$ функционални графици. Доказати да је тада $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \subseteq (A \times X) \times (B \times Y)$ такође функционалан график.

11. Нека су $f: X \to Y$, $g: A \to B$ ф-је. Доказати

$$f \times g\,(x, a) = (f(x), g(a)).$$

12.* Нека је $f = (F, X, Y)$ ф-ја. Доказати:

а) f је ИНЈЕКТИВНО $\iff (\forall x_1, x_2 \in X)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

б) f је СУРЈЕКТИВНО $\iff (\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ f(x) = y$.

13. Нека је дата релација $\sim$ на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ т.д.

$$(x,y)\sim(s,t) \overset{\text{деф.}}{\iff} x-s\in\mathbb{Z} \wedge y-t\in\mathbb{Z}$$

Доказати да је $\sim$ релација еквиваленције и наћи количнички скуп $\mathbb{R}\times\mathbb{R}/_{\sim}$.

14.* Нека је $(A,\leq)$ уређен скуп, $S,T\in\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(A)$ фамилија подскупова. Тада важи:

а) $s=\sup\emptyset \iff s=\min A$

$t=\inf\emptyset \iff t=\max A$

б) Ако је $S\neq\emptyset$ и постоје $\sup S$ и $\inf S$

$$\Rightarrow \inf S\leq\sup S$$

в) Ако су $S,T\neq\emptyset$ и имају $\sup$ и $\inf$ онда:

$$S\subseteq T \Rightarrow \inf T\leq\inf S\leq\sup S\leq\sup T$$

г) Нека за $(\forall X\in\mathcal{A})$ $\exists\sup X$. Тада:

$$\exists\sup\bigcup_{X\in\mathcal{A}}X \iff \exists\sup\{\sup X \mid X\in\mathcal{A}\}$$

и уколико постоје једнаки су.

15. Нека је $(A,\leq)$ уређен скуп, $f: S\times T\to A$ пресликавање. Ако постоји $\sup f$ онда је

$$\sup f=\sup_{s\in S}\left(\sup_{t\in T}f(s,t)\right).$$

16. Нека је $f:(A, \leq_A) \to (B, \leq_B)$ строго монотоно сурјективно пресликавање. Доказати:

а) f има инверзно пресликавање

б) f, f^{-1} су изоморфизми уређених структура

17. Нека је $f:(A, \leq_A) \to (B, \leq_B)$ изоморфизам уређених скупова и $S \subseteq A$. Доказати да је

а) $f(\max S) = \max f(S)$, уколико постоји $\max S$

б) $f(\sup S) = \sup f(S)$, уколико постоји $\sup S$.